Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD. Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 0 (nicht abzugeben)

Faktorielle Ringe und Teilbarkeit in Ringen:

(i) Definieren Sie Teiler in einem beliebigen Ring. Wann nennt man Elemente eines Ringes irreduzibel bzw. prim?

(ii) In welchen Verhältnis stehen die Klassen der Ringe, integren Ringe (Integritätsbereiche), faktoriellen Ringe, Hauptidealringe, euklidischen Ringe und Körper zueinander?

(iii) Welche der folgenden Ringe sind faktoriell?

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}[x], \quad \mathbb{R}[x,y]/(y^2-x^3), \quad \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3,\dots]/(x_1-x_2^2, x_2-x_3^2,\dots)$$

Algebraische Körpererweiterungen:

(i) Wann nennt man Elemente $a \in L$ einer Körpererweiterung $K \subseteq L$ algebraisch über K? Wie kommen dort Minimalpolynome ins Spiel?

(ii) Ist das Algebraisch-sein abgeschlossen unter Summen- bzw. Produktbildung?

(iii) Wie erweitert man einen Körper in der Regel?

Ganze Ringerweiterungen = Algebraische Erweiterungen von Ringen:

(i) Überträgt man das Konzept des Algebraisch-seins von Körpererweiterungen zu Ringerweiterungen, so erhält man Ringerweiterungen, welche leider nicht so gute Eigenschaften besitzen. Bei algebraischen Körpererweiterungen $K \subseteq L$ kann man nämlich bekanntlich höhere Potenzen eines Elementes $a \in L$ vermöge des Minimalpolynomes durch niedrigere Potenzen ausdrücken. In anderen Worten, der K-Vektorraum $K(a)$ ist endlich-dimensional. Das muss bei dem Analogon für Ringe nicht gegeben sein. Betrachten Sie die Ringerweiterung $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ und geben Sie dafür ein Beispiel an. Gesucht ist also ein Element $a \in \mathbb{Q}$, welches eine polynomielle Gleichung über $\mathbb{Z}$ erfüllt, sodass $\mathbb{Z}[a]$ ein nicht-endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul ist.

(ii) Es stellt sie heraus, dass man obiges Problem begradigen kann, indem man nur noch normierte Polynome erlaubt. Dieses Konzept erhält nun den Namen der ganzen Ringerweiterung. Definieren Sie ganze Ringerweiterungen explizit.

(iii) Zeigen Sie, dass ein Element $a \in \mathbb{Q}$ genau dann ganz über $\mathbb{Z}$ ist, falls $a \in \mathbb{Z}$ ist. Anders ausgedrückt sind also die ganzen Zahlen der Ringerweiterung $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (siehe obige Definition) genau die ganzen Zahlen (unser gutes altes $\mathbb{Z}$).